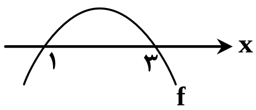
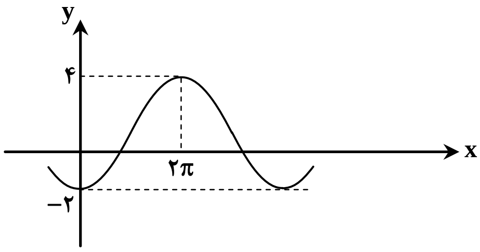
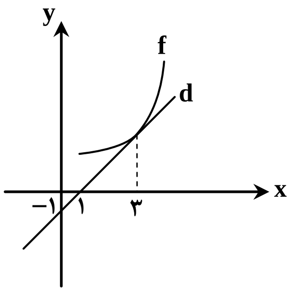
ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) تابع $y=-\log_{۰/۵} x$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است. ب) اگر $f(۲)=۴$ و $g(۴)=۲$ باشند، آن‌گاه $(gof)(۲)=۲$. پ) تابع $y=\tan x$ در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{۴},\pi\right]$ اکیداً صعودی است. ت) بازهٔ $(۲,۳)$ یک همسایگی برای عدد $\sqrt{۵}$ است.	۱
۲	جاهای خالی را با عدد یا کلمهٔ مناسب پر کنید. الف) تابع $f(x)=ax+۳x-۲a$ هم صعودی و هم نزولی است. مقدار a برابر .... است. ب) با فرض $f(x)=x+\sqrt{x}$، مقدار $(f^{-۱}of)(۲۵)$ برابر .... است. پ) اگر $۸\sin ۲x\cos ۲x=۳$ باشد، آن‌گاه مقدار $\sin ۴x$ برابر .... است. ت) باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^۸+۴x^۷-x^۳+۲x^۲-۲$ بر $x+۱$، برابر .... است.	۱
۳	گزینهٔ درست را انتخاب کنید. الف) اگر نقطهٔ $A(۳,-۶)$ روی تابع $y=f(x)$ باشد، متناظر آن روی تابع $y=۱-\frac{۱}{۲}f(۳x)$ کدام است؟ ۱) $(۱,۴)$ ۲) $(۹,۴)$ ۳) $(۱,-۱۰)$ ۴) $(۹,-۱۰)$ ب) اگر حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(a-۲)x^۳+۲x^۲+۱}{x^۲-۳x+۲}$، عدد غیرصفر b باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ ۱) ۳/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۴ پ) با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه نادرست است؟ ۱) $f'(۳)<f'(۱)$ ۲) $f'(۳)-f'(۱)>۰$ ۳) $f'(۳)\cdot f'(۱)<۰$ ۴) $f'(۱)-f'(۳)>۰$ 	۱/۵
۴	الف) نمودار تابع $f(x)=-(x+۱)^۳+۱$ را رسم کنید. ب) نمودار تابع $y=\|f(x)\|$ را رسم کنید. پ) وضعیت اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی بودن تابع $y=\|f(x)\|$ را در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ مشخص کنید.	۱/۲۵
۵	توابع $f(x)=۴-\sqrt{x-۲}$ و $g(x)=x^۲+۳$ مفروض‌اند. الف) دامنهٔ تابع fof را با استفاده از تعریف به‌دست آورید. ب) ضابطهٔ تابع $(fog)(x)$ را تشکیل دهید.	۱/۷۵
۶	نمودار تابع $y=f\left(\frac{۳}{۲x-۱}\right)$ را یک واحد به‌سمت چپ می‌آوریم و سپس طول نقاط نمودار حاصل را دو برابر می‌کنیم و در نهایت نمودار حاصل را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. با انجام مراحل انتقال، ضابطهٔ تابع به‌دست آمده را بنویسید.	۱
۷	الف) ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=۳-\sqrt{۴-x}$ را به‌دست آورید. ب) اگر $g(۲)=۳$، حاصل $(f^{-۱}og^{-۱})(۳)$ را به‌دست آورید.	۱/۵
۸	تابع $y=۲m\sin(mnx)-n$ مفروض است. اگر ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۶ و ۴- باشند: الف) تمام مقادیر ممکن برای m را به‌دست آورید. ب) دورهٔ تناوب تابع را به‌دست آورید.	۱

ردیف		نمره
۹	شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a\,Sin\,bx + c$ یا $y = a\,Cos\,bx + c$ است. با محاسبهٔ مقادیر a، b و c ضابطهٔ تابع را بنویسید. 	۱/۲۵
۱۰	مقدار $Cos\,22/5^\circ$ را به‌دست آورید.	۰/۷۵
۱۱	جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $Cos\,4x = 3\,Sin\,2x - 1$ را به‌دست آورید.	۱/۵
۱۲	حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید. الف) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + x}$ ب) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4}$ پ) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x\lvert x\rvert - 2}{2x^2 + x(x-1)}$	۳/۲۵
۱۳	اگر $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3[x] + 2k}{x^2 - 3x} = +\infty$ باشد، حدود k را به‌دست آورید.	۰/۷۵
۱۴	مطابق شکل، خط d در نقطه‌ای به‌طول $x = 3$ بر تابع f مماس است. حاصل $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3f(x) - 6}{x - 3}$ را به‌دست آورید. 	۱
۱۵	با تعریف مشتق، مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2 + 3x$ را در $x = -1$ به‌دست آورید.	۱/۵

موفق باشید

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

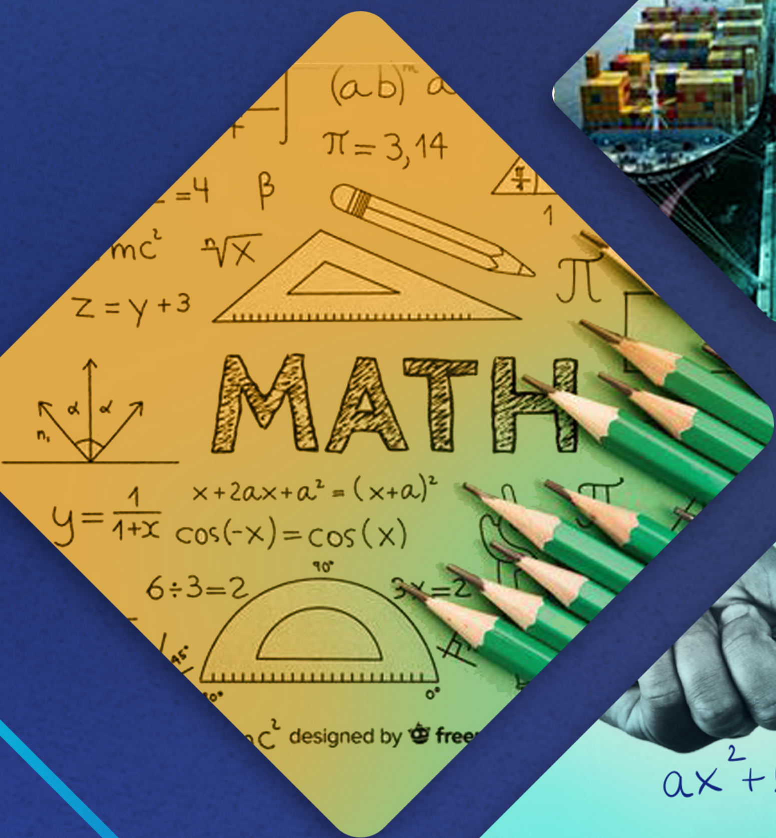
ویژهٔ پایهٔ دوازدهم

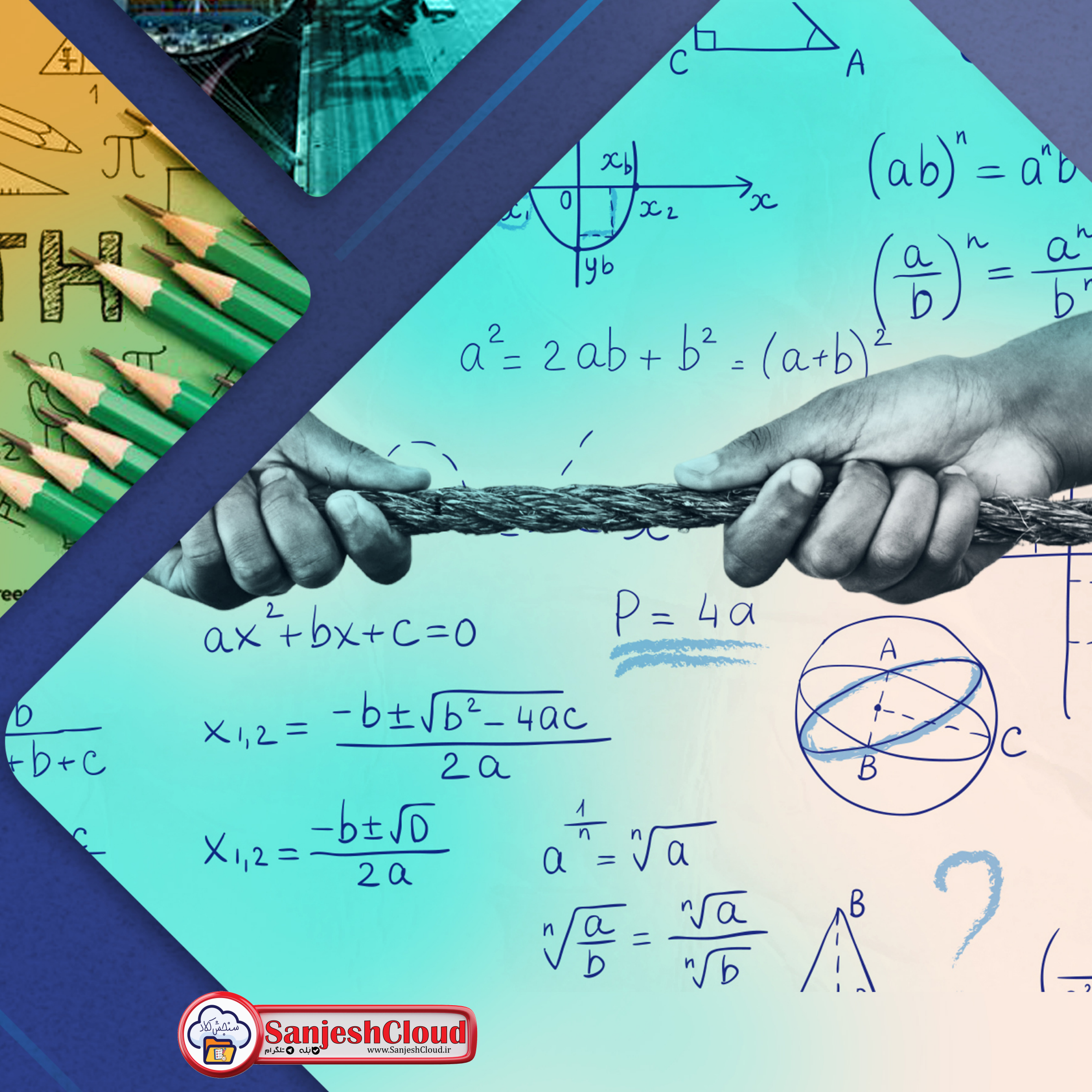
دی ۱۴۰۳

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۲

ریاضی ۳ (رشته علوم تجربی)





۱۴۰۳_۱۴۰۴

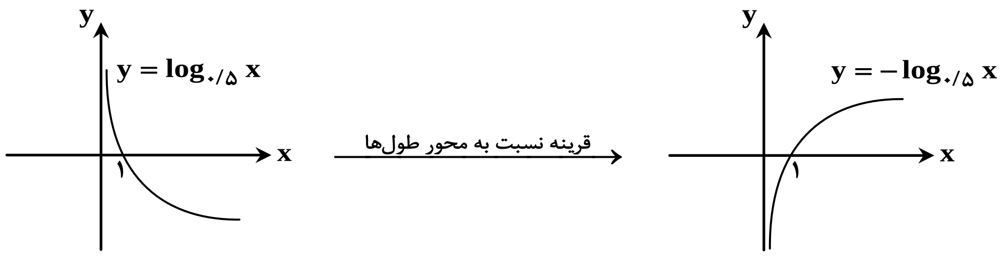
-۱

الف) درست

نکتهٔ ۱: اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم $f(x_۱) < f(x_۲)$، آن‌گاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

نکتهٔ ۲: اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم $f(x_۱) > f(x_۲)$، آن‌گاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

تابع $y = \log_{۰/۵} x$ اکیداً نزولی است، پس تابع $y = -\log_{۰/۵} x$ که قرینهٔ آن نسبت به محور طول‌هاست، اکیداً صعودی است.



ب) درست

نکته: اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری که برد تابع f و دامنهٔ تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع gof را تابع مرکب می‌نامیم به عبارت دیگر:

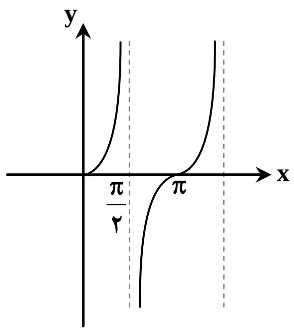
$$(gof)(x) = g(f(x))$$

$$(gof)(۲) = g(f(۲)) = g(۴) = ۲$$

پ) نادرست

نکته: اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم $f(x_۱) < f(x_۲)$، آن‌گاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$، تابع در این بازه غیریکنوا است.



ت) درست

نکته: هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی $x_۰$ را یک همسایگی $x_۰$ می‌نامیم؛ به عبارت دیگر اگر $x_۰ \in (a,b)$، آن‌گاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی $x_۰$ می‌باشد.

چون $\sqrt{۵} \in (۲,۳)$، پس این بازه یک همسایگی برای $\sqrt{۵}$ است.

-۲

الف) -۳

نکتهٔ ۱: اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم $f(x_۱) \le f(x_۲)$، آن‌گاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.

نکتهٔ ۲: اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم $f(x_۱) \ge f(x_۲)$، آن‌گاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.

تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است؛ بنابراین باید ضریب x برابر صفر باشد:

$$f(x) = (a+۳)x - ۲a \xrightarrow{\text{ثابت } f} a + ۳ = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

ب) ۲۵

نکته: اگر f تابعی وارون‌پذیر و $f^{-۱}$ وارون آن باشد، همواره داریم:

$$f(f^{-۱}(x)) = x \ ; \ x \in D_{f^{-۱}}$$

$$f^{-۱}(f(x)) = x \ ; \ x \in D_f$$

از آنجا که $۲۵ \in D_f$؛ بنابراین $(f^{-۱}of)(۲۵) = ۲۵$

پ) $\frac{۳}{۴}$

نکته: برای محاسبهٔ سینوس دو برابر یک زاویه داریم:

$$\text{Sin}\,۲\alpha = ۲\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha$$

طرفین رابطهٔ $۸\,\text{Sin}\,۲x\,\text{Cos}\,۲x = ۳$ را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$۲\,\text{Sin}\,۲x\,\text{Cos}\,۲x = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \text{Sin}\,۴x = \frac{۳}{۴}$$

ت) -۲

نکته: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

مقدار $f(-۱)$ همان باقی‌مانده است؛ بنابراین:

$$f(-۱) = ۱-۴+۱+۲-۲ \Rightarrow r = -۲$$

۳-

الف) گزینهٔ ۱

برای رسم تابع $y = ۱-\frac{۱}{۲}f(۳x)$ باید طول نقاط را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب کنیم. سپس عرض نقاط را قرینه و $\frac{۱}{۲}$ برابر کرده و یک واحد به آن‌ها اضافه کنیم.

$$A(۳,-۶) \in f \Rightarrow A'(۳\times\frac{۱}{۳}, -(-۶)\times\frac{۱}{۲}+۱) \Rightarrow A'(۱,۴)$$

ب) گزینهٔ ۴

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

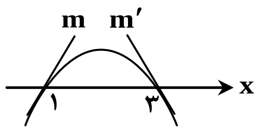
$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + k) = \lim_{x\to+\infty} ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} ax^n$$

چون حاصل حد عدد غیرصفر b است، پس باید صورت و مخرج هم‌درجه (هم‌توان) باشند. مخرج درجه‌دوم است پس باید صورت نیز درجه‌دوم باشد؛ بنابراین:

$$\begin{cases} a-۲=۰ \Rightarrow a=۲ \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x^۲+۱}{x^۲-۳x+۲} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x^۲}{x^۲} = ۲ \Rightarrow b=۲ \end{cases} \Rightarrow a+b=۴$$

پ) گزینهٔ ۲

می‌دانیم شیب خط مماس در هر نقطه برابر مشتق تابع در آن نقطه است. بنابراین: $f'(۱) = m > ۰$ و $f'(۳) = m' < ۰$



اکنون گزینه‌های داده‌شده را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: $\underset{-}{f'(۳)} < \underset{+}{f'(۱)}$ ✓

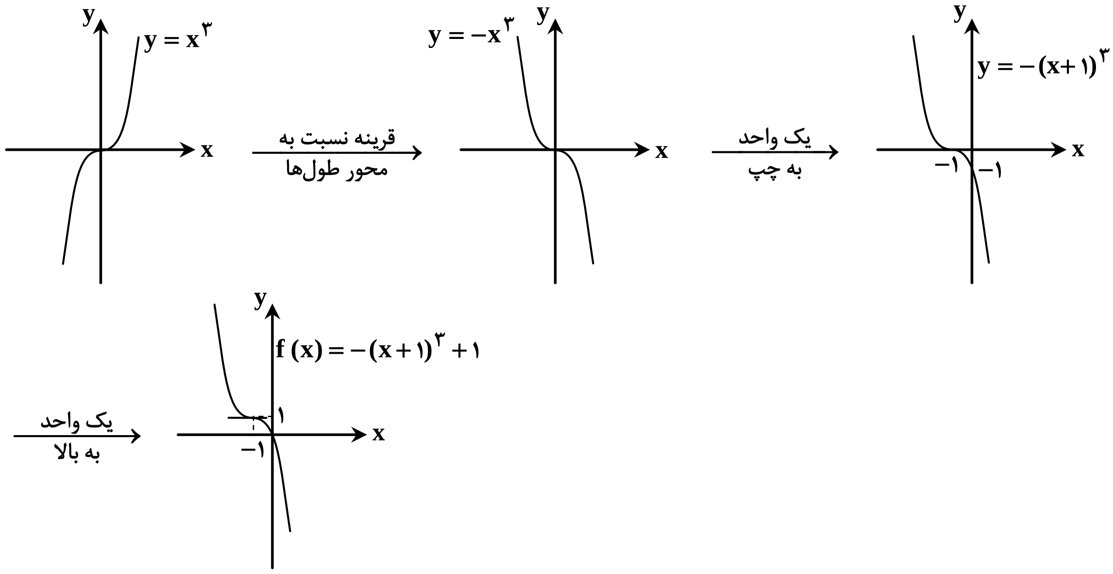
گزینهٔ ۲: $\underset{-}{f'(۳)} - \underset{+}{f'(۱)} > ۰$ ✗

گزینهٔ ۳: $\underset{-}{f'(۳)} \cdot \underset{+}{f'(۱)} < ۰$ ✓

گزینهٔ ۴: $\underset{+}{f'(۱)} - \underset{-}{f'(۳)} > ۰$ ✓

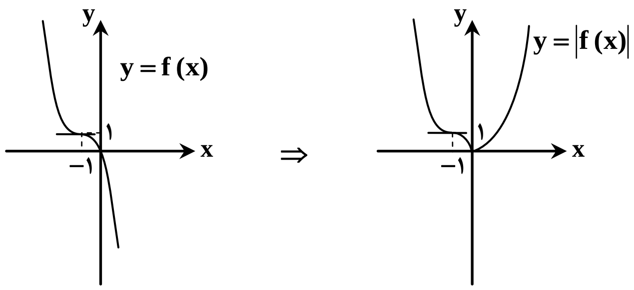
۴-

الف) نمودار تابع $y = x^{3}$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده و سپس یک واحد به چپ و یک واحد به بالا می‌بریم تا نمودار $f(x) = -(x+1)^{3} + 1$ به‌دست آید.



ب)

نکته: برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور xهاست، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور xها رسم کنیم.



پ)

نکتهٔ ۱: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$، آن‌گاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

نکتهٔ ۲: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$، آن‌گاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

با توجه به نمودار تابع $y = |f(x)|$، تابع در بازهٔ $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

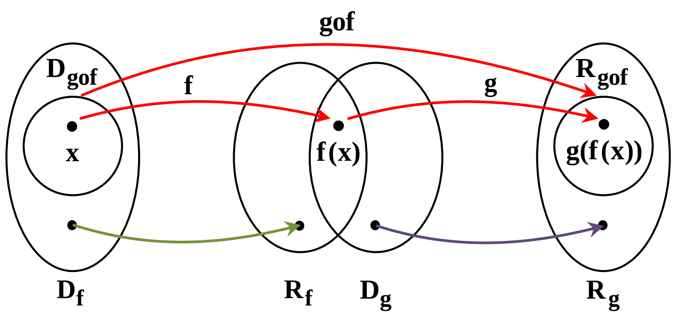
۵-

الف)

نکته: دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱- x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲- $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنه تابع gof را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

به‌صورت مشابه دامنهٔ تابع fog به‌صورت زیر است:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$x-2\ge 0 \Rightarrow x\ge 2 \Rightarrow D_f=[2,+\infty)$$

اکنون داریم:

$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\{\underbrace{x\in[2,+\infty)}_{(1)} \mid 4-\sqrt{x-2}\ge 2\}$$

$$4-\sqrt{x-2}\ge 2 \Rightarrow \sqrt{x-2}\le 2 \xrightarrow[\text{توان ۲}]{x\ge 2} x-2\le 4 \Rightarrow x\le 6 \quad (2)$$

$$(1)\cap(2) \Rightarrow 2\le x\le 6 \Rightarrow D_{fof}=[2,6]$$

ب)

نکته: اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری که برد تابع f و دامنهٔ تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع gof را تابع مرکب می‌نامیم به عبارت دیگر: $(gof)(x)=g(f(x))$

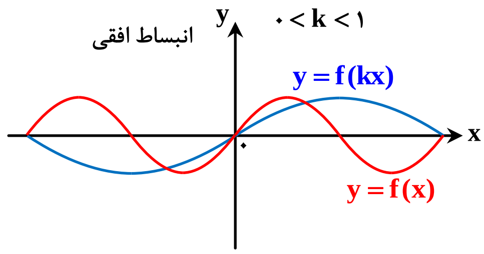
$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2+3)=4-\sqrt{(x^2+3)-2}=4-\sqrt{x^2+1}$$

۶-

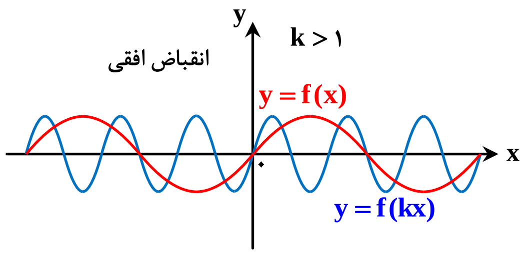
نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به‌دست آورد.

اگر $k<0$، ابتدا نمودار f نسبت به محور yها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به‌طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.



اگر $0<k<1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.



اگر $k>1$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.

مراحل انتقال را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

$$y=f\left(\frac{3}{2x-1}\right) \xrightarrow{x\to x+1} y=f\left(\frac{3}{2(x+1)-1}\right)=f\left(\frac{3}{2x+1}\right) \xrightarrow{x\to \frac{x}{2}} y=f\left(\frac{3}{2\frac{x}{2}+1}\right)=f\left(\frac{3}{x+1}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}]{x\to -x} y=f\left(\frac{3}{-x+1}\right)$$

۷-

الف)

نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

راه‌حل اول:

ابتدا x را برحسب y محاسبه می‌کنیم و سپس با تبدیل y به x، ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=3-\sqrt{4-x} \Rightarrow \sqrt{4-x}=3-y \xrightarrow[y\le 3]{3-y\ge 0} 4-x=(3-y)^2 \Rightarrow x=4-(3-y)^2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=4-(3-x)^2=-x^2+6x-5 \quad ; \quad x\le 3$$

راه‌حل دوم:

ابتدا x و y را با هم جابه‌جا می‌کنیم و سپس با محاسبهٔ y برحسب x، ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x=۳-\sqrt{۴-y} \Rightarrow \sqrt{۴-y}=۳-x \xrightarrow[x\le ۳]{۳-x\ge ۰} ۴-y=(۳-x)^۲ \Rightarrow y=۴-(۳-x)^۲$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=۴-(۳-x)^۲=-x^۲+۶x-۵ \quad ; \quad x\le ۳$$

ب)

نکته: اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$$

می‌دانیم:

$$g(۲)=۳ \Rightarrow g^{-1}(۳)=۲$$

حال داریم:

$$(f^{-1}og^{-1})(۳)=f^{-1}(g^{-1}(۳))=f^{-1}(۲)=-۴+۱۲-۵=۳ \Rightarrow (f^{-1}og^{-1})(۳)=۳$$

-۸

نکته: توابع $y=a\operatorname{Sin}bx+c$ و $y=a\operatorname{Cos}bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$، مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ هستند.

الف) با توجه به ضابطهٔ تابع $y=۲m\operatorname{Sin}(mnx)-n$ داریم:

$$\begin{cases} \max=|۲m|-n=۶ \\ \min=-|۲m|-n=-۴ \end{cases} \xrightarrow{+} -۲n=۲ \Rightarrow n=-۱$$

بنابراین:

$$|۲m|+۱=۶ \Rightarrow |۲m|=۵ \Rightarrow m=\pm\frac{۵}{۲}$$

ب) با توجه به رابطهٔ $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|mn|}=\frac{۲\pi}{\frac{۵}{۲}}=\frac{۴\pi}{۵}$$

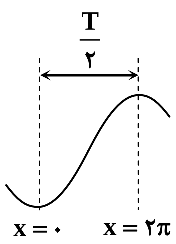
-۹

نکته: توابع $y=a\operatorname{Sin}bx+c$ و $y=a\operatorname{Cos}bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$، مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ هستند.

با توجه به شکل، نمودار داده‌شده مربوط به تابع $y=a\operatorname{Cos}bx+c$ است، زیرا مینیمم تابع روی محور عرض‌ها قرار دارد. از طرفی شکل، قرینهٔ نمودار تابع $y=\operatorname{Cos}bx$ است، پس $a<۰$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \max=|a|+c=۴ \\ \min=-|a|+c=-۲ \end{cases} \Rightarrow ۲c=۲ \Rightarrow c=۱ \Rightarrow |a|=۳ \xrightarrow{a<۰} a=-۳$$

از طرفی نصف دورهٔ تناوب تابع برابر ۲π است پس دورهٔ تناوب تابع برابر ۴π است و داریم:



$$T=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi \Rightarrow \frac{۱}{|b|}=۲ \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲} \Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$$

پس ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=-۳\operatorname{Cos}(\pm\frac{۱}{۲}x)+۱$ است.

-۱۰

نکته: برای محاسبهٔ کسینوس دو برابر یک زاویه داریم:

$$\operatorname{Cos}۲\alpha=\operatorname{Cos}^۲\alpha-\operatorname{Sin}^۲\alpha=۲\operatorname{Cos}^۲\alpha-۱=۱-۲\operatorname{Sin}^۲\alpha$$

با فرض $\alpha=۲۲/۵^\circ$ و $۲\alpha=۴۵^\circ$ داریم:

$$\operatorname{Cos}۲\alpha=۲\operatorname{Cos}^۲\alpha-۱ \Rightarrow \operatorname{Cos}۴۵^\circ=۲\operatorname{Cos}^۲ ۲۲/۵^\circ-۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱=۲\operatorname{Cos}^۲ ۲۲/۵^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}+۲}{۲}=۲\operatorname{Cos}^۲ ۲۲/۵^\circ$$

$$\xrightarrow{\div ۲} \frac{\sqrt{۲}+۲}{۴}=\operatorname{Cos}^۲ ۲۲/۵^\circ \xrightarrow{\operatorname{Cos}۲۲/۵^\circ>۰} \operatorname{Cos}۲۲/۵^\circ=\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+۲}}{۲}$$

۱۱-

نکتهٔ ۱: برای محاسبهٔ کسینوس دو برابر یک زاویه داریم:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

نکتهٔ ۲: جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشند که $k \in Z$.

با توجه به رابطهٔ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ معادله را حل می‌کنیم:

$$\cos 4x = 3\sin 2x - 1 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 2x = 3\sin 2x - 1 \Rightarrow 2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 2 = 0$$

با فرض $\sin 2x = t$ و $-1 \le t \le 1$ داریم:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta = 25} t = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \ \checkmark \\ t = -2 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

۱۲-

الف)

نکته: در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$، اگر $f(a) = g(a) = 0$، نتیجه می‌گیریم که چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ بخش‌پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x-a)$، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطهٔ a، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

در اینجا حد صورت و مخرج کسر در $x = -1$ برابر صفر است. پس باید عامل $x+1$ در صورت و مخرج ظاهر شود. برای تجزیهٔ صورت، آن را بر $x+1$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 2x^2 - 1 & x+1 \\ \cline{2-2} -(x^3 + x^2) & x^2 + x - 1 \\ \cline{1-1} \quad x^2 - 1 & \\ \quad -(x^2 + x) & \\ \cline{1-1} \quad\quad -x - 1 & \\ \quad\quad -(-x-1) & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

اکنون حاصل حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + x} = \lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2 + x - 1)}{x\cancel{(x+1)}} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2 + x - 1}{x} = 1$$

ب)

نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبهٔ حد $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفرشدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده‌کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

در اینجا حد صورت و مخرج کسر برابر صفر است. پس باید عامل $x-2$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. برای این کار صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2 - x - 2}{(x^2 - 4)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)(x + \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \frac{3}{16}$$

پ)

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)=\lim_{x\to+\infty}ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

ابتدا دقت می‌کنیم که وقتی $x\to-\infty$ آن‌گاه $|x|=-x$، اکنون داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x|x|-۲}{۲x^۲+x(x-۱)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^۲-۲}{۲x^۲+x^۲-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^۲}{۳x^۲}=-\frac{۱}{۳}$$

-۱۳

نکته: فرض کنیم $\lim_{x\to a}f(x)=L\neq ۰$ و $\lim_{x\to a}g(x)=۰$، در این صورت:

الف) اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ابتدا داریم:

$$x\to ۳^- \Rightarrow [x]=[۳^-]=۲$$

اکنون داریم:

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{۳[x]+۲k}{x^۲-۳x}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{۶+۲k}{x(x-۳)}=\frac{۶+۲k}{۳(۰^-)}=\frac{۶+۲k}{۰^-}=+\infty$$

چون در همسایگی چپ $x=۳$، مخرج کسر با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند پس باید صورت کسر عددی منفی باشد، تا جواب حد برابر $+\infty$ شود؛ بنابراین:

$$۶+۲k<۰ \Rightarrow ۲k<-۶ \Rightarrow k<-۳$$

-۱۴

نکته: شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ $A(a,f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ } A=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

به‌شرط آن‌که این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ابتدا شیب خط d را به‌دست می‌آوریم و سپس معادلهٔ آن را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}(۱,۰)\in d\\(۰,-۱)\in d\end{cases}\Rightarrow m_d=\frac{۰+۱}{۱-۰}=۱ \Rightarrow y=x-۱$$

خط d در $x=۳$ بر تابع f مماس است؛ بنابراین داریم:

$$y=x-۱ \xrightarrow{x=۳} y=۲ \Rightarrow f(۳)=۲$$

حال داریم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۳f(x)-۶}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{۳(f(x)-۲)}{x-۳}=۳\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=۳f'(۳)$$

پس حاصل حد برابر $۳f'(۳)$ است. از طرفی شیب خط مماس d در نقطهٔ $x=۳$ همان $f'(۳)$ است؛ بنابراین حاصل حد برابر است با:

$$m_d=۱ \Rightarrow ۳f'(۳)=۳\times۱=۳$$

۱۵-

نکتهٔ ۱: حد زیر را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکتهٔ ۲: مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر است با:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

راه‌حل اول:

$$f'(a)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}\xrightarrow{f(-۱)=-۲} f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۲+۳x+۲}{x+۱}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x+۲)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}(x+۲)=۱$$

راه‌حل دوم:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Rightarrow f'(-۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}\xrightarrow{f(-۱)=-۲}\lim_{h\to ۰}\frac{(-۱+h)^۲+۳(-۱+h)+۲}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۲-۲h+۱+۳h-۳+۲}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۲+h}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(h+۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}(h+۱)=۱$$